ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

"HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL AULA"

AUTORÍA **JESÚS BERNAL RODRÍGUEZ**
TEMÁTICA **HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS**
ETAPA **BACHILLERATO**

Resumen

Una de las dificultades que nos podemos encontrar a la hora de organizar nuestras clases de bachillerato es cómo introducir la historia de las matemáticas en ellas. En este artículo vamos a tratar de centrar ideas sobre de qué forma se deben introducir y presentaré vías concretas que se ajusten a éstas.

Palabras clave

- Historia de las matemáticas
- núcleo temático
- bachillerato

1. ACLARACIONES

En este artículo vamos a restringirnos exclusivamente a usar la *Orden de 5 de Agosto de 2008*, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía. Si bien es cierto que gran parte de lo que se diga en este artículo puede ser aplicable a otras comunidades autónomas, los posibles matices o concreciones que usen dichas administraciones referentes al *Real Decreto 1467/2007* deberán ser tenidas en cuenta. Así mismo, es previsible que la salida de algún nuevo decreto pueda añadir o matizar en algo lo usado en este artículo.

2. INTRODUCCIÓN

Una de las grandes dificultades que se nos presenta a los docentes a la hora de organizar y desarrollar nuestras clases es adaptarnos a las nuevas directrices que nos marcan las nuevas reformas

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

educativas. Con la citada orden, se nos dice entre otras cosas que el estudio de las Matemáticas en el bachillerato de Ciencias y Tecnología en Andalucía incluye cuatro núcleos temáticos, a saber:

1. Resolución de problemas.
2. Aprender de y con la Historia de las Matemáticas.
3. Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos.
4. Modelización matemática.

En esencia, puede parecer que el enfoque actual no es más que parafrasear normativas anteriores. Realmente lo que sucede es que estos elementos se podían localizar anteriormente, de hecho la resolución de problemas era lo que más se destacaba, pero la novedad radica en resaltarlos enumerándonoslos expresamente y dando explícitamente consideraciones sobre lo que hay o no que entender por ellos y referencias a los recursos que pueden guiarnos. En este artículo nos centraremos en el segundo de los núcleos temáticos como ya avancé en el resumen, no sin antes destacar las relaciones intrínsecas que debemos tener en cuenta.

Las ideas que deben movernos a la hora de plantear nuestras acciones docentes deben tener en consideración que:

- *Los núcleos temáticos no deben ser compartimentos estancos*

Esta idea consiste en que para aprender matemáticas no basta sólo con problemas, o trabajar exclusivamente por ramas, sino que se hace necesario la presencia de los núcleos temáticos. En la resolución de problemas por ejemplo, puede intervenir un contexto histórico que deba ser tenido en cuenta o que requiera recurrir a construir modelos inspirados en otras conocidos.

- *Deben abordarse de forma cíclica, gradual y con atención a todos los bloques*

Se nos dice expresamente que deben aparecer en todos los bloques (análisis, geometría...). Esto ya de entrada nos debe conducir a preguntas como: ¿qué contenidos son más propicios a centrarnos en un núcleo temático u otro? Por cíclica y gradual nos dicen que los núcleos temáticos deben ir de menos a más y cimentarse sobre conocimientos anteriores. Podríamos entonces afirmar que se debe entender el trabajo por núcleos temáticos como una espiral en sentido creciente. Esta idea no es nueva pues una de las mejores formas de aprender matemáticas y enriquecer conocimientos previos es ver los mismos conceptos en contextos diferentes, ver sus aplicaciones, simular en nuestras aulas la evolución y/o creación de algunos conceptos. Por ello es importante que como docentes seamos capaces de no sólo usar la resolución de problemas como método y fin de trabajo; la finalidad es más amplia que la de resolver problemas.

Aunque esta orden da flexibilidad sobre cómo y en qué medida deben estar presentes los núcleos temáticos, ni mucho menos impone un modelo a seguir. De hecho la palabra clave al respecto es que el

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

estudio en estas asignaturas (Matemáticas I y II) *incluye* (no que se componga) de los núcleos temáticos.

3. ¿CÓMO CONTRIBUYE APRENDER DE Y CON LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS AL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS?

Como nos resume la orden el fin con el que debemos usarla es para que contribuya a la contextualización, comprensión y aprendizaje de las matemáticas. Puede ayudar en diversos aspectos del aprendizaje de las matemáticas poniendo de manifiesto los objetivos con los que fueron creados los conceptos y ayudar a percibir cómo están presentes en nuestra cultura. Para ayudarles a entender que su aprendizaje es una transformación de sus propios conocimientos como ha sucedido a lo largo de la historia y cómo está presente y ha ayudado a desarrollar aspectos de otras áreas del conocimiento. Podemos servirnos de las nuevas tecnologías para simular/crear conceptos como fueron imaginados por los que los crearon.

El propósito de este núcleo temático podemos decir por tanto que es a la vez instrumental y transversal. Sus contenidos tienen sentido cuando aparecen integrados al desarrollar los demás. Es por eso que, más aclaratoriamente, se nos indica que no se trata de presentar biografías y anécdotas como un simple entretenimiento, sino que a través de la historia de las matemáticas consigamos dar otra visión de un concepto, introducirlo de forma más eficaz. Seremos nosotros los que determinaremos si el orden histórico se ajusta a nuestro fin didáctico, o por el contrario preferimos un orden lógico o usar otra vía. Un ejemplo quizás clarificador para la mayoría, sea el muy recurrente para mí de la introducción del concepto de probabilidad. Podemos distinguir al menos dos formas de hacerlo:

A) *Usar el orden histórico*. Este consistiría en remitirnos a Pacioli y dar el salto a Laplace. Darle sentido de porqué Laplace no estuvo muy acertado en su suposición de que los sucesos elementales en un espacio muestral finito sean equiprobables y la necesidad de reformular esta conjetura para dar solución a nuevos problemas. Tras unos pasos habremos llegado a la formulación más general de Kolmogorov. Aun así, en este caso hay muchas variantes, también se puede optar por incluir la progresión de la estadística del siglo XX como motor e incluso conjugarlo con lo anterior.

B) *Usar el orden constructivo*. En el momento que presentamos la probabilidad como una medida que mide la certidumbre o creencia sobre la ocurrencia de un suceso, el matiz es totalmente distinto. Ya Laplace pasa a ser una forma de asignar valores a sucesos, válido por suponer que nuestro espacio muestral finito es equiprobable, o que por ignorancia o despreciando valores insignificantes, podemos llegar a la conclusión de que esta hipótesis es razonable. Aquí la gracia sin duda es estar pensando en medidas cuando se trabaja en probabilidad, haciendo de esto un auténtico filón. No hace falta justificar este concepto pues ya ha sido trabajado en cursos anteriores con la medida de áreas o longitudes. La asignación de probabilidades puede venir entonces de diversas fuentes: Estudio de frecuencias de los sucesos un número suficiente de veces, nuestra propia intuición, la experiencia...

Realmente podríamos citar hasta una tercera vía, que sería *usar la formalidad matemática exclusivamente*. Presentar el concepto tal cual: definición, axiomas, proposición... El motivo de no incluirla es básicamente porque es una vía en la que no creo y particularmente cómoda para el profesor, pues seguro que todos tenemos acceso a manuales y bibliografía donde podemos encontrar el saber descrito de esta forma. Aunque encaminemos a los estudiantes a este tipo de trabajo que por desgracia ha movido las universidades demasiadas décadas, esta vía es extremadamente artificial. No tiene significado en sí misma y los estudiantes deben esforzarse en encontrar referencias en su experiencia para poder retenerlas, lo cual bajo mi punto de vista supone un doble esfuerzo.

Por supuesto, la historia de las matemáticas puede servir para mucho más que para introducir y trabajar con un concepto. Podemos usarlo también para contrastar mirando al pasado mediante el análisis de un texto histórico. Entre estas puede ser particularmente interesante recurrir a la correspondencia que mantenían algunos matemáticos (digo matemáticos en un sentido amplio pues habían hasta abogados aficionados a resolver cuestiones matemáticas). Obtener información sobre el origen y significado de los términos, símbolos y palabras matemáticas. Plantear problemas que hayan tenido gran relevancia histórica y cómo lo resolvieron frente a cómo se puede resolver actualmente revela la trascendencia de conceptos que los alumnos llegan a captar como familiares (como puede ser el infinito, los propios números irracionales o la existencia del número pi por citar ejemplos más cercanos a ellos). Los razonamientos lógicos y las reducciones a lo absurdo cobrarán entonces un sentido investigador y de avances, y con suerte infundiremos en algunos de nuestros alumnos la idea de que las matemáticas son un saber que crece por gente que como ellos un día tuvieron una nueva idea.

3. EJEMPLOS DE CASOS PRÁCTICOS PARA NUESTRAS AULAS

Ahora voy a presentar una selección de supuestos prácticos en los que usar este núcleo temático. Simplemente pretenden ser modelos para que cada docente plantee sus clases.

3.1. Análisis crítico de un texto: No numerabilidad de R

Este texto no es más que una traducción de una carta que George Cantor le mandó a Richard Dedekind el 29 de noviembre de 1873 (extraído del libro que figura en la bibliografía):

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

Permítame que le haga llegar una cuestión que para mí resulta interesante históricamente hablando pero a la que no soy capaz de responder; tal vez pueda usted y tenga la amabilidad de escribirme sobre esto. He aquí la cuestión.

Tomemos el conjunto de todos los enteros positivos n *y denotémoslo por* (n)*; y consideremos además, el conjunto de todas las magnitudes numéricas reales positivas* x *y denotémoslas por* (x)*; entonces la cuestión es simple, ¿pueden ser* (n) *y* (x) *puestos en correspondencia de tal forma que cada individuo de un conjunto se corresponda con uno y sólo uno del otro conjunto? A primera vista, uno tiende a afirmar que no es posible, ya que* (n) *se compone de partes discretas, mientras que* (x) *consiste en un continuo; pero no me parece suficiente este inconveniente, y por mucho que tienda a pensar que* (n) *y* (x) *no admiten una correspondencia unívoca, todavía no puedo encontrar el motivo, que es lo que me interesa, pero quizás es muy sencillo.*

Con este texto podemos usarlo en principio para lanzar una serie de preguntas o plantearlas por escrito:

- Si ya sabemos que N está dentro de R, ¿por qué Cantor no pudo decir que esto era evidente? Quizás el problema no es sólo ése. Intenta pensar en lo que ya conoces y haz una tormenta de ideas.
- ¿En qué consiste la correspondencia uno a uno? Busca ejemplos en tu vida diaria. Por ejemplo: Cada lugar de la clase tiene asignado un alumno, no pueden haber dos alumnos que estén en el mismo lugar.
- N está incluído en Z, ¿se pueden poner en correspondencia uno a uno?
- Como verás, la forma de llamar y notar a los conjuntos ha cambiado respecto a los que has aprendido. ¿Eres capaz de decir cómo escribiría Cantor esta carta actualmente?
- N está incluído en Q, ¿se pueden poner en correspondencia uno a uno?
- ¿Te parecen razonables las ideas que llevan a Cantor a pensar que con N y R quizás la situación sea distinta?

Esto no es más que un ejemplo de cómo trabajar sobre un texto y usarlo en el aula para llegar a la idea que perseguimos que quede al final de estas cuestiones: R ya es no numerable. Lo interesante y a la vez vital a la hora de usar un texto es no desviarnos del objetivo, no debemos hacer creer al alumno que todo lo que contamos es importante o estaremos realmente alejados de obtener lo que queremos. El hecho de explicar al principio de curso esta forma de trabajar, permitirá a los alumnos identificar que lo que pretendemos es llegar a una comprensión, pues nuestro discurso ha variado. Ya no estamos definiendo, ni resolviendo problemas sin más, estamos trabajando sobre conceptos e ideas conocidas y adentrándonos en otras, los formalismos vienen después.

REVISTA DIGITAL INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

3.2. Problemas con historia: El problema de las edades

Este problema se le planteó a Albert Einstein por uno de sus alumnos:

- *Por cierto -pregunta uno-, ¿cuántos años tienen tus tres hijas?*
- *El producto de sus edades es 36 -le contesta su colega-, y la suma de estas es, por casualidad, igual al número de tu casa.*

Tras pensar por unos momentos, el que hizo la pregunta dice:

- *Me falta un dato.*
- *Es cierto -le replica-. Se me había olvidado decirte que la mayor toca el piano.*

¿Qué edades tienen las tres hijas del profesor?

No debemos confundir un problema histórico con un problema de pasatiempos. Al menos no deberíamos caer en semejante error. Este problema en sí mismo requiere de algo más que de dar la solución, requiere de un análisis. ¿Realmente es importante saber el número de la casa? Los problemas que podemos encontrar sin duda tienen un factor de interpretación y razonamiento que debe producirse en el alumnado. Usar problemas abiertos, con información superflua debe ser algo que aparezca en nuestros problemas, o corremos el riesgo de obtener respuestas automáticas a estímulos siempre que estos vengan de una forma reconocible o siguiendo estereotipos conocidos. También es buena opción referirnos a otros métodos para hacer cosas que ya saben hacer a ver si saben decir o llegar a intuir el porqué es cierto. Como ilustración cito el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números naturales:

Se toma el mayor de los naturales a y b, dividiendo el mayor por el menor. Si el resto es 0, resulta que el menor es el máximo común de a y b. En caso contrario, se divide el divisor anterior entre el resto y se repite el proceso hasta obtener como resto 0. El último divisor empleado es el máximo común divisor.

Quizás dar una explicación formal de porqué funciona este método esté alejado de los alumnos incluso al estar finalizando bachillerato, pero pueden llegar a razonamientos válidos igualmente que expliquen perfectamente porqué funciona. Nuestros alumnos no están preparados para dar el salto a una formalidad matemática rigurosa porque el salto se inicia en bachillerato, pero debemos encaminarlos a que vayan adquiriendo estas destrezas. No ya sólo pensando en una posible continuación de sus estudios, sino porque las matemáticas cobran realmente sentido cuando se es capaz de tener ideas de cuál es el camino a recorrer. Por ejemplo, se le pide a los alumnos que mediante diagramas verifiquen si es cierta la siguiente proposición y sino que den un contraejemplo:

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

Si A y B son sucesos incompatibles, entonces ¬(A)^B=B.

En principio, puede que debamos poner un caso concreto de un espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado. Pero llegará el momento que dibujemos dos círculos que no se corten y visualicemos que esta propiedad es cierta. El hecho de usar un diagrama o un dibujo es casi siempre el apoyo que permite a posteori quizás en otro nivel dar el salto a la formalidad matemática, que no es más muchas veces que poner por escrito una idea que ya tiene uno (aunque debo añadir que el paso que ya no es visible hasta el nivel universitario, son nuevas abstracciones sobre lo ya conocido, y es que la formalidad matemática llega más allá de la intuición y a veces los descubrimientos superan con creces a los inicios de la propia teoría, por citar un ejemplo conocido la imposibilidad de construir el heptágono regular convexo con regla y compás). Esto es algo que se puede explotar una y otra vez a través de la historia de las matemáticas, primero surgían ideas primitivas, luego se analizaba y generalizaba y luego avanzaba el conocimiento. (En esta línea, podemos citar los tratados de geometría de Euclides, como a partir de unas reglas básicas se desarrolla una cantidad de resultados uno tras otro).

3.3. Uso de medios audiovisuales

También podemos optar por videos que complementen nuestras clases o ejerzan un papel motivador en nuestros alumnos. En ellos la historia de las matemáticas aparece como introducción e integrado en la presentación de conceptos y su desarrollo. A nivel de bachillerato son particularmente interesantes estas series:

- *El universo mecánico*, con títulos apropiados para su uso en 2º de bachillerato:
  - Vectores
  - Derivadas
  - Integrales
  - Energía y excentricidad (cónicas)
  - La manzana y la Luna

- *Más por menos*, la duración de los videos es de un cuarto de hora por lo que son muy útiles para la clase:
  - El número áureo
  - Movimientos en el plano
  - La geometría se hace arte

ISSN 1988-6047 DEP. LEGAL: GR 2922/2007 Nº 20 JULIO DE 2009

- El mundo de las espirales
- Cónicas: del baloncesto a los cometas
- Fibonacci. La magia de los números
- Las leyes del azar
- Números naturales. Números primos
- Fractales, la geometría del caos
- Matemática electoral
- Un número llamado e
- El lenguaje de las gráficas
- Matemáticas y realidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Ferreirós Domínguez, J. (2007) *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*. Vermont:Springer

Autoría

- Nombre y Apellidos: Jesús Bernal Rodríguez
- Málaga
- E-mail: jesustemporal@hotmail.com